### **Лабораторная работа по теме**

### ***«Тема 1.3. Интерполяция функций»***

#### **1.3.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задач аппроксимации и интерполяции.
2. Основные понятия: интерполирующая и интерполируемая функции, условие интерполяции. Связь между числом узлов интерполяции и порядком интерполирующего многочлена.
3. Условие единственности решения задачи интерполирования.
4. Интерполяционный многочлен Лагранжа: назначение, область применения.
5. Методика выбора узлов интерполяции при использовании формул Лагранжа и Ньютона.
6. Способы оценки погрешностей интерполяции по формулам Лагранжа и Ньютона. Способы повышения точности интерполяции.
7. Интерполяционная формула Ньютона, область применения.
8. Конечные разности, их назначение и использование. Свойства конечных разностей.
9. Правило выбора начальных узлов интерполяции для формул Ньютона.
10. Практическое правило определения степени интерполяционного многочлена.
11. Сравнение интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона.
12. Погрешность интерполяции.
13. Сплайн интерполяция.

#### **1.3.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл.1.3-1 и табл. 1.3-2 для решения задач интерполяции:

* из табл. 1.3-1 выбираем значения параметров **t1** и **t2,** а такжезначения**x=a** (для построения многочлена Ньютона) и **x=b** (для построениямногочлена Лагранжа)**;**
* из табл. 1.3-2 в соответствии с методикой выбора узлов интерполяции по значению **x=a** выбираем узлы интерполяции (из отрезка **[0.05;1.55]** – область задания интерполируемой функции) и значения функции в этих узлах. Число узлов определяется заданной степенью интерполяционного многочлена в соответствии с п.**2** и п.**3**.

Следует обратить внимание, что:

* + если точка **x=a** расположена ближе к левому концу отрезка, выбираемого из табл.1.3-2, то для построения первой формулы Ньютона необходимо выбрать узлы ( - ближайший к точке **x=a** узел слева);



* + если точка **x=a** расположена ближе к правому концу отрезка, выбираемого из табл.1.3-2, то используют вторую формулу Ньютона и необходимо выбрать узлы (**xn** – ближайший к точке **x=a** узел справа);



* + если точка **x=a** расположена примерно в середине таблицы, то следует выбрать ту формулу, которая обеспечит меньшую погрешность.

1. **Выполнить линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию** функции , заданной таблично (табл.1.3-2), указанным в табл.1.3-1 методом (значение **t1**) «расчет на ПК»:

* составить схему алгоритма и программу решения задачи интерполяции и провести контрольное тестирование на данных примера, разобранного в п. **5**;
* вычислить значение интерполирующего многочлена Ньютона в точке ; для многочлена Лагранжа в точке ;



* провести оценку погрешности интерполяции по формулам практической оценки погрешности.

1. **Построить интерполяционный многочлен второй степени** (Ньютона или Лагранжа в зависимости от значения **t2**) в явном виде (ручной расчет). Вычислить значения построенного многочлена во всех выбранных узлах интерполяции. **Сравнить полученные результаты** с таблично заданными значениями.

#### **1.3.3. Варианты задания**

Таблица 1.3-1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ вар** | **Вид интерполяционного многочлена** | | | **t1** | **t2** |
| **Многочлен**  **Ньютона** | **Многочлен Лагранжа** | |
| **x=a** | **x=b** | **Номера узлов** |
| **1** | 0.17 | 0.43 | 4,6,7,9,11,12 | 1 | 2 |
| **2** | 1.02 | 0.72 | 10,11,12,14,16,17 | 2 | 1 |
| **3** | 0.34 | 1.17 | 19,20,22,23,24,26 | 1 | 2 |
| **4** | 1.41 | 0.58 | 7,8,10,11,13,15 | 1 | 2 |
| **5** | 0.23 | 0.12 | 0,1,3,5,,6,7 | 2 | 1 |
| **6** | 0.67 | 1.21 | 21,23,24,26,27,28 | 2 | 1 |
| **7** | 1.29 | 1.46 | 24,25,26,28,29,30 | 2 | 1 |
| **8** | 0.81 | 0.87 | 13,15,16,18,20,21 | 2 | 1 |
| **9** | 0.06 | 0.48 | 6,8,9,10,12,14 | 2 | 1 |
| **10** | 1.12 | 1.37 | 23,24,26,28,29,30 | 2 | 1 |
| **11** | 0.93 | 0.51 | 6,8,9,10,13,14 | 1 | 2 |
| **12** | 0.37 | 0.96 | 16,18,19,20,22,23 | 1 | 2 |
| **13** | 0.26 | 0.64 | 8,9,11,12,14,15 | 2 | 1 |
| **14** | 1.07 | 1.52 | 24,25,27,28,29,30 | 1 | 2 |
| **15** | 1.33 | 0.77 | 10,12,13,14,16,17 | 2 | 1 |
| **16** | 0.43 | 0.17 | 0,1,2,4,6,7 | 2 | 1 |
| **17** | 0.72 | 1.02 | 16,18,19,21,22,24 | 1 | 2 |
| **18** | 1.17 | 0.34 | 2,4,5,6,8,9 | 2 | 1 |
| **19** | 0.58 | 1.41 | 23,24,26,27,29,30 | 1 | 2 |
| **20** | 0.12 | 0.23 | 0,2,3,5,6,7 | 1 | 2 |
| **21** | 1.21 | 0.67 | 10,11,12,14,16,17 | 2 | 1 |
| **22** | 0.87 | 1.29 | 22,24,25,27,28,29 | 2 | 1 |
| **23** | 0.48 | 0.81 | 12,14,15,17,18,19 | 2 | 1 |
| **24** | 1.37 | 1.26 | 21,23,24,26,27,29 | 1 | 2 |
| **25** | 0.51 | 1.12 | 18,19,21,22,24,26 | 2 | 1 |
| **26** | 0.96 | 0.93 | 15,17,18,19,21,22 | 2 | 1 |
| **27** | 0.64 | 0.37 | 3,5,6,8,9,11 | 1 | 2 |
| **28** | 0.77 | 0.26 | 2,4,5,7,8,9 | 1 | 2 |
| **29** | 0.08 | 1.07 | 17,18,20,21,23,24 | 2 | 1 |
| **30** | 1.31 | 1.33 | 21,22,24,26,27,28 | 1 | 2 |

В табл. 1.3-1**t1, t2** – способы аппроксимации функции в соответствии с п.**2** и п.**3**

задания. Если в графе стоит **1**, то использовать интерполяционный многочлен

Ньютона, если **2**, то интерполяционный многочлен Лагранжа.

Таблица 1.3-2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ узла** | **Значение аргумента** | **Значение функции** |
| 0 | 0.05 | -4.171 |
| 1 | 0.1 | -4.133 |
| 2 | 0.15 | -4.0845 |
| 3 | 0.2 | -4.024 |
| 4 | 0.25 | -3.95 |
| 5 | 0.3 | -3.861 |
| 6 | 0.35 | -3.7555 |
| 7 | 0.4 | -3.632 |
| 8 | 0.45 | -3.489 |
| 9 | 0.5 | -3.325 |
| 10 | 0.55 | -3.1385 |
| 11 | 0.6 | -2.928 |
| 12 | 0.65 | -2.692 |
| 13 | 0.7 | -2.429 |
| 14 | 0.75 | -2.1375 |
| 15 | 0.8 | -1.816 |
| 16 | 0.85 | -1.463 |
| 17 | 0.9 | -1.077 |
| 18 | 0.95 | -0.6565 |
| 19 | 1 | -0.2 |
| 20 | 1.05 | 0.294 |
| 21 | 1.1 | 0.827 |
| 22 | 1.15 | 1.4005 |
| 23 | 1.2 | 2.016 |
| 24 | 1.25 | 2.675 |
| 25 | 1.3 | 3.379 |
| 26 | 1.35 | 4.1295 |
| 27 | 1.4 | 4.928 |
| 28 | 1.45 | 5.776 |
| 29 | 1.5 | 6.675 |
| 30 | 1.55 | 7.6265 |

Например, выбор задания из табл.1.3-1 по номеру варианта (№10):

1. Выбрать метод (в графе **t1** указано значение **2** – выполнить интерполяцию с использованием многочлена Лагранжа), далее выбрать из этой же строки номера узлов (**23, 24, 26, 28, 29, 30**), которым соответствуют значения аргумента и функции в   
   табл.1.3-2, и точку (**b=1.37**), в которой нужно вычислить значение многочлена.



1. Из столбца **t2** выбрать метод (**1** – построить в явном виде интерполяционный многочлен Ньютона), выбрать из табл.1.3-2 узлы интерполяции в соответствии со значением (**a=1.12**).



#### **1.3.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.

Для многочленов Ньютона и многочлена Лагранжа указать последовательность выбранных узлов из предложенного диапазона для первой формулы Ньютона, - для второй формулы Ньютона, - для формулы Лагранжа.



1. Линейная, квадратичная и кубическая интерполяция функции , заданной таблично (табл. 1.3-2), указанным в табл. 1.3-1 методом (значение **t1**) «расчета на ПК»:



* схемы алгоритмов и программа интерполяции с результатами контрольного тестирования;
* значения интерполирующего многочлена Ньютона в точке ; для многочлена Лагранжа в точке (табл. 1.3-3);



* значения погрешностей интерполяции по формулам практической оценки погрешности, результат которых необходимо записать в табл. 1.3-3.

Таблица 1.3-3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число узлов n+1** |  |  | **Оценки погрешностей** | |
| **Метод Ньютона** | **Метод Лагранжа** |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

1. Интерполяционный многочлен второй степени (Ньютона или Лагранжа в зависимости от значения **t2**) в явном виде (вручную) и значения построенного многочлена во всех выбранных узлах интерполяции, которые необходимо записать в табл. 1.3-4; сравнить полученные результаты с таблично заданными значениями.

Таблица 1.3-4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **xi** |  |  |  |
| **P2(xi)** |  |  |  |
| **L2(xi)** |  |  |  |
| **y=f(xi)** |  |  |  |

#### **1.3.5. Пример выполнения задания**

1. **Задание для интерполяции функций**

функция y=f(x), заданная таблично значениями в узлах интерполяции:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ узла-i** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **xi** | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 |
| **y=f(xi)** | 0.8881 | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5095 | 1.6963 |

* вычислим значение многочлена Ньютона в точке **x=a=0.57** и значение многочлена Лагранжа в точке **x=b= 0.62**:
* для вычисления значения интерполирующей функции в точке **x=a=0.57** методом Ньютона выберем узлы интерполяции **х0=0.55**, **х1=0.60**, **х2=0.65**, **х3=0.70** (**x0=0.55**– ближайший к точке**х=а=0.57**узел слева**)**;
* для вычисления значения интерполирующей функции в точке **x=b=0.62** методом Лагранжа выберем номера узлов интерполяции 1, 2, 3, 4, что соответствует значениям узлов **х0=0.55**, **х1=0.60**, **х2=0.65, х3=0.70**(из указанного диапазона узлов).

**2. Линейная, квадратичная и кубическая интерполяция«расчетом на ПК»**:

* схемы алгоритмов представлены на рис. 1.3.2-1, 1.3.2-2 и рис. 1.3.3-1 в [2], а программы студенты должны написать самостоятельно;
* значение полинома в заданной точке.

Для построения интерполяционного многочлена Ньютона воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, так как точка интерполяции **a** =**0.57** находится в начале таблицы значений выбранных узлов интерполяции (отрезок**[0.50;0.75]**).

Ближайший к точке **а** узел слева **х=0.55**, поэтому полагаем .



Для линейной интерполяции следует взять узлы и .



Для квадратичной и кубической интерполяции выберем соответственно следующие последовательности узлов:

, ; ;



, , ,



(число узлов равно **n+1**, где **n** – порядок многочлена).

Для выбранной последовательности узлов:

**•** построить таблицу конечных разностей;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** |  |  |  |  |
| 0.55 | 1.0265 | 0.1487 | 0.0127 | -0.0012 | 0.0036 |
| 0.60 | 1.1752 | 0.1614 | 0.0115 | 0.0024 |  |
| 0.65 | 1.3366 | 0.1729 | 0.0139 |  |  |
| 0.70 | 1.5095 | 0.1868 |  |  |  |
| 0.75 | 1.6963 |  |  |  |  |

**•** вычислить значение интерполирующего многочлена Ньютона в точке **a=0.57,**

воспользовавшись формулой 1.3.3-6 в [2] при



Значение интерполирующего многочлена Ньютона при **n+1=2** (линейная интерполяция):



.



Аналогично вычисляются значения

• при **n+1=3** (квадратичная интерполяция): **Р2(0.57)=1.08446 ,**

• при **n+1=4** (кубическая интерполяция): **Р3(0.57)=1.08438.**

В случае, если точка интерполяции находится в конце таблицы, на которой задана функция **y=f(x)**, интерполирование проводится по второй интерполяционной формуле Ньютона1.3.3-9 в [2] при , **xn** – ближайший к точке **х** узел справа.



Например, если задана точка интерполяции**а=0.73**, то для линейной интерполяции в этом случае следует взять узлы:**xn=0.75, xn-1=0.70,**для квадратичной – узлы: **xn=0.75, xn-1=0.70, xn-2=0.65**, для кубической - **xn=0.75, xn-1=0.70, xn-2=0.65, xn=3=0.60.**

Тогда



Если точка интерполяции находится в середине таблицы, то выбор интерполяционной формулы Ньютона производится исходя из значения величины **q**. Например, если **x=a=0.58**, то для построения квадратичного полинома (**n+1=3**) лучше выбрать узлы **xn=0.60, xn-1=0.55, xn-2=0.50,** так как при этом величина **q** будет меньше(**q=-0.4**). (Для сравнения: если выбрать узлы **x0=0.55**, **x1=0.60, x2=0.65**, то **q=0.6**).

Для построения интерполяционного многочлена Лагранжа воспользуемся формулой  
1.3.2-5 в [2].

Для обеспечения большей точности интерполяции перенумеруем узлы интерполяции: выберем узел (ближайший к точке **b=0.62**), далее выбираем узлы по возможности симметрично относительно точки интерполяции **b=0.62**:



Вычислим значение интерполирующего многочлена Лагранжа в точке **b=0.62**.

При **n+1=1** (линейная интерполяция) значение интерполирующего полинома будет следующим:



Проведя аналогичные вычисления, получим значения интерполирующего полинома:

* при **n+1=2** (квадратичная интерполяция**) -**



* при **n+1=3**(кубическая интерполяция) -



Вычислим погрешность интерполяции по формулам практической оценки погрешности.

Погрешность первой формулы Ньютона оценим по 1.3.3-13 в [2].



Для линейной интерполяции:.



Для квадратичной интерполяции: .



Для кубической интерполяции: .



Анализируя полученные значения погрешностей, можно сделать вывод, что интерполируемая функция близка к квадратичной, так как конечные разности третьего порядка значительно различаются, а



Оценку погрешности многочлена Лагранжа произведем по формуле:

.



**, , ,** где  **b=0.62.**



Исходными данными для программной реализации являются таблично заданная функция **y=f(x)** и значения **x=a**или**x=b**. (Заметим, что при составлении программы алгоритма следует предусмотреть вывод значений конечных разностей).

Результаты интерполяции и оценки погрешности следует записать в табл.1.3-3:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число**  **Узлов**  **n+1** |  |  | **Оценка погрешности** | |
| **Метод Ньютона** | **Метод Лагранжа**  **||** |
| 2 | 1.08598 | 1.23976 | 1.52•10-3 | 1.52•10-3 |
| 3 | 1.08445 | 1.23824 | 7.68•10-5 | 6.72•10-5 |
| 4 | 1.08438 | 1.23830 | 1.5•10-4 | 8.0•10-5 |

**3. Построение интерполяционных многочленов второй степени** в явном виде («ручной

расчет»)

Для построения интерполяционных многочленов, помимо известных из [2] формул,можно использовать формулы1.3.2-6 и 1.3.3-4 из [2].

Построенные квадратичные интерполяционные полиномы Ньютона (для выбранных узлов) и Лагранжа (для выбранных узлов) имеют вид:

**P2(x)= 2.54 x2 + 0.053x + 0.229,**

**L2(x) = 2.54 x2 + 0.053x + 0.229.**

Выражения для полиномов совпали, т.к. для построения обоих многочленов были

выбраны одинаковые узлы.

Вычислим значения построенного многочлена в выбранных узлах интерполяции и

занесем в табл.1.3-4 и для сравнения туда же занесем таблично заданные значения

исходной функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 |
| **P2(xi)** | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5107 |
| **L2(xi)** | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5107 |
| **y=f(xi)** | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5095 |

#### **1.3.6. Контрольные вопросы по теме**

### ***«Тема 1.3. Интерполяция функций»***

1. Что называется задачей интерполяции и задачей аппроксимации?
2. Что называется узлами и шагом интерполяции?
3. Что такое интерполируемая функция и интерполирующая функция?
4. Существует ли связь между числом узлов интерполяции и степенью интерполяционного многочлена?
5. Что обеспечивает единственность решения полиномиального интерполирования?
6. Можно ли, используя одни и те же узлы интерполяции, построить несколько интерполяционных полиномов?
7. Сколько интерполяционных полиномов степени n существует, если функция задана (n + 1**)** узлом?
8. Изменится ли точность интерполяции при увеличении или уменьшении количества узлов?
9. Какой метод интерполяции позволяет обеспечить наименьшую погрешность при вычислении значения функции в точке x, находящейся в начале таблицы с равноотстоящими узлами?
10. Какой метод интерполяции позволяет обеспечить наименьшую погрешность при вычислении значения функции в точке x, находящейся в конце таблицы с равноотстоящими узлами?
11. Как изменится формула Лагранжа при добавлении в таблицу значений функции еще одного узла?
12. Какой степени является полином, полученный с использованием формулы Лагранжа при использовании n + 1 узлов таблицы?
13. Если интерполируемая функция f(x)задана в (n + 1**)** равноотстоящих узлах, то для ее интерполяции удобнее использовать формулу Ньютона или формулу Лагранжа?
14. Какой степени является полином, полученный с использованием формулы Ньютона при использовании n + 1 равноотстоящих узлов таблицы?
15. Можно ли при использовании формулы Лагранжа располагать узлы интерполяции в произвольном порядке?
16. Потребуется ли полный пересчет коэффициентов формулы Лагранжа при добавлении дополнительного узла интерполяции?
17. В чем заключается универсальность формулы Лагранжа?
18. От чего зависит точность интерполяции?
19. Можно ли при использовании интерполяционных формул Ньютона располагать узлы в произвольном порядке?
20. Что такое «конечные разности»?
21. Чему равен порядок конечной разности наивысшего порядка, полученный по n исходным точкам?
22. Что происходит с формулой Ньютона при добавлении очередного узла интерполяции?
23. Чем отличаются результаты интерполяции, если при построении интерполяционных полиномов по формулам Лагранжа и Ньютона были использованы одни и те же узлы?
24. Чему равна степень интерполяционного полинома Ньютона при трех заданных точках интерполируемой функции?
25. Если интерполируемая функция задана аналитическим выражением, требуется ли для решения задачи интерполяции предварительно рассчитать значения функции в узлах?